

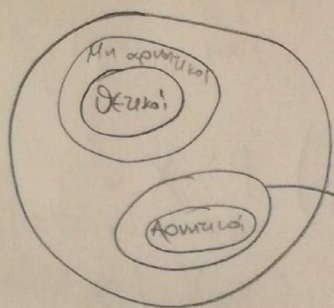
► $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^t = A$ (συμμετρικός)

A θετικός $\xLeftrightarrow{\text{ορίστ.}} X^t A X > 0 \quad \forall X \neq 0_{n \times 1}$

- A αρνητικός $\Leftrightarrow X^t A X < 0 \quad \forall X \neq 0$

A μη αρνητικός $\Leftrightarrow X^t A X \geq 0$

A μη θετικός $\Leftrightarrow X^t A X \leq 0$



Σύνολο των συμμετρικών $n \times n$ πινάκων

Μη θετικός

($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^t = A$)

► A θετικός $\Leftrightarrow -A$ αρνητικός

A μη αρνητικός $\Leftrightarrow -A$ μη θετικός

Θεώρημα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός πίνακας. Ο A είναι θετικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοτιμή του είναι θετική.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω λ ιδιοτιμή του A . Τότε $\lambda \in \mathbb{R}$ (φανερό θεώρημα). Έστω X ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Ανλ. $X \neq 0_{n \times 1}$ και $AX = \lambda X$

A θετικός: $X^t A X > 0$ για κάθε $X \neq 0_{n \times 1}$

$$X \neq 0 \quad \text{άρα} \quad Y^t A Y > 0 \Rightarrow Y^t \lambda Y > 0 \Rightarrow \lambda Y^t Y > 0 \Rightarrow \lambda \underbrace{(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)}_{\text{θετικός}} > 0$$

① Άρα $\lambda > 0$

($\Leftarrow$) Όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές
 A συμμετρικός $\xrightarrow[\text{θεωρήματα}]{\text{φασματολογικά}}$ υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = P^t A P$$

Έστω $X \neq 0_{n \times 1}$: $X^t A X = X^t \left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^t \right) X =$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix} = P^t X$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \underset{1 \times n}{X^t} \underset{n \times n}{P} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \underset{n \times n}{P^t} \underset{n \times 1}{X} =$$

$$= (P^t X)^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^t X =$$

$$= (y_1, y_2, \dots, y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= (y_1, y_2, \dots, y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} = (\underbrace{\lambda_1 y_1^2}_{>0} + \underbrace{\lambda_2 y_2^2}_{>0} + \dots + \underbrace{\lambda_n y_n^2}_{>0})$$

$X \neq 0_{n \times 1}$ αφού αν $X=0$ τότε $X=PY=P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{n \times 1}$

Άρα $(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2) > 0$

Άρα A θετικός

- ▶ $A < 0$ όλες οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές
 $A \geq 0$ όλες οι ιδιοτιμές είναι ≥ 0
 $A \leq 0$ όλες οι ιδιοτιμές του A είναι ≤ 0

- $A \geq 0$ και A αντιστρέψιμος $\Rightarrow A > 0$
 $A \leq 0$ και A αντιστρέψιμος $\Rightarrow A < 0$

Κριτήριο Sylvester: Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

συμμετρικός $n \times n$ πίνακας. A είναι θετικός αν και μόνο αν

$\rightarrow \det(a_{11}) > 0$

$\rightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0$

$\rightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0$

$\vdots$

$\rightarrow \det A > 0$

Δ Έστω $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 2 & \sqrt{5} & -2017 \\ 4 & -2017 & n^{17} \end{pmatrix} > 0;$

Λύση: Θα πρέπει $7 > 0$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & \sqrt{5} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow 7\sqrt{5} - 4 > 0$$

$$\rightarrow |A| > 0 \Rightarrow 7\sqrt{5}n^{17} - 2 \cdot 2017 \cdot 2 \cdot 4 - 16\sqrt{5} - (2017)^2 \cdot 7 - 4n^{17} > 0$$

• A αρνητικός αν και μόνο αν

$$\rightarrow \det(a_{ii}) < 0$$

$$\rightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} > 0$$

$$\rightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} < 0$$

$\vdots$

$$\rightarrow \det A > 0 \text{ ή άρως}$$

$$\text{ή αντίστροφα } \det A < 0$$

Όρες γραφείου (περίοδος εξεταστικής)

Τρίτη 13 Ιανου	12-2
Τετάρτη 14	-11- -11-
Πέμπτη 15	-11- -11-
Παρασκευή 16	-11- -11-

Άσκηση 4 / Φυλλάδιο # 7

Βρείτε όλα τα a για $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} > 0$

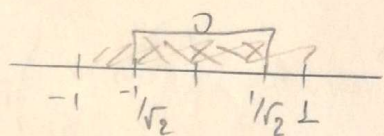
Λύση: Εφαρμογή Sylvester. $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $A^t = A$
Θα πρέπει $\rightarrow 1 > 0$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow 1 - a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 < 1 \Leftrightarrow |a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1$$

$$\rightarrow |A| > 0 \Leftrightarrow 1 \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - a^2 - a(a - 0) > 0 \Leftrightarrow \cancel{1 - a^2} - a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$|a| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\text{Άρα } a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Άσκηση 5/Φυλλάδιο #7

$A > 0, B > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ νίσιμες. Δείξτε ότι $\alpha A + bB > 0$ όταν $\alpha > 0, b > 0$ και $(\alpha, b) \neq (0, 0)$

Μην: $A > 0 \Rightarrow A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $A^t = A$

$B > 0 \Rightarrow B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $B^t = B$

$\alpha A + bB \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$(\alpha A + bB)^t = (\alpha A)^t + (bB)^t = \alpha A^t + bB^t = \alpha A + bB$$

άρα $\alpha A + bB$ συμμετρικός

$$\text{Έστω } X \neq 0_{n \times 1} \quad X^t(\alpha A + bB)X = X^t \alpha A X + X^t b B X =$$

$$\alpha X^t A X + b X^t B X > 0 \quad \text{Άρα } (\alpha A + bB) > 0$$

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ο $A > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $B^t = B$ τέτοιος ώστε $B^2 = A$

Απόδειξη: $A > 0 \Rightarrow A$ συμμετρικός και όλες οι ιδιοτιμές > 0

$$A \text{ συμμετρικός} \xrightarrow[\text{Σπέρμα}]{\text{Φασματικό}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = P^t A P \Leftrightarrow A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^t$$

$$B^2 = B B = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_n} & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^t P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_n} & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^t = B$$
$$= A$$

$$B = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^t$$

($\Leftarrow$) Υπόσχεται $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $B^t = B$ τέτοιος ώστε $B^2 = A$

$$A = B^2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$A^t = (B^2)^t = (B B)^t = B^t B^t = B \cdot B = A \quad A \text{ συμμετρικός}$$

$$X \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad X^t A X = X^t B \cdot B X = \underbrace{X^t B^t}_{\text{}} \underbrace{B X}_{\text{}} =$$

$$= (B X)^t B X = \|B X\|^2 \geq 0$$

Πρόταση: Έστω $A > 0$ τότε A αντιστρέψιμος και $A^{-1} > 0$

Απόδειξη: $A > 0 \Rightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές

$\Rightarrow$ το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του $A \Rightarrow \det A \neq 0$

$\Rightarrow A$ αντιστρέψιμος

Δ A συμμετρικός $\xrightarrow[\text{Ορθογώνια}]{\text{Φασματικό}}$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = P^t A P \quad \lambda_i > 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & \\ & 1/\lambda_2 & \\ & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & \\ & 1/\lambda_2 & \\ & & 1/\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = (P^t A P)^{-1} = P^{-1} A^{-1} (P^t)^{-1} = P^t A^{-1} P$$

$$A^{-1} = P \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & \\ & 1/\lambda_2 & \\ & & 1/\lambda_n \end{pmatrix} P^t$$

$$(A^{-1})^t = \left(P \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & \\ & 1/\lambda_2 & \\ & & 1/\lambda_n \end{pmatrix} P^t \right)^t = P \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & 0 \\ & 1/\lambda_2 & \\ 0 & & 1/\lambda_n \end{pmatrix} P^t = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & \\ & 1/\lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & 1/\lambda_n \end{pmatrix} = P^t A^{-1} P$$

$1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n$ ιδιοτιμές του A^{-1}

$$1/\lambda_1 > 0 \quad 1/\lambda_n > 0 \quad \text{άρα} \quad A^{-1} > 0$$